

ЛЕКЦИЯ-1

1 НЕГІЗГІ ҰҒЫМДАР МЕН ИНТЕГРАЛДЫҚ ТЕНДЕУЛЕРГЕ КЕЛТІРІЛЕТІН ЕСЕПТЕР

§1.1. Интегралдық тендеулерді кластарға бөлу

Белгісіз функциялар интегралдардың астында кездесетін тендеулер интегралдық тендеулер деп аталады. Егер белгісіз функция интегралдық тендеуге сызықтық түрде қатынасса, онда тендеуді сызықтық деп атайды.

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds + f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (1)$$

түріндегі тендеу Фредгольмнің 2-текті сызықтық интегралдық тендеуі деп аталады. Мұндағы, $\varphi(x)$ – нақты айнымалы x аргументіне тәуелді белгісіз функция, $f(x)$ функциясы $[a,s]$ кесіндісінде, $K(x,s)$ функциясы $D = \{a \leq x, s \leq b\}$ жиынында аныкталған белгілі функциялар: $f(x)$ пен $K(x,s)$ сәйкес интегралдық тендеудің бос мүшесі мен ядросы деп аталады, ал λ – параметр. Интегралдың жоғарғы және төменгі шектері (a мен b) жалпы жағдайда тұрақты шамалар; олар шектелген де, шектелмеген де болуы мүмкін. Егер $f(x) \equiv 0$ болса, онда жоғарыдағы (1) интегралдық тендеу біртекті, ал $f(x) \neq 0$ болған жағдайда – біртекті емес деп аталады.

Фредгольмнің I-текті интегралдық тендеуінде белгісіз функция интегралдық мүшеде ғана қатысады, дәлірек айтқанда, ол тендеу

$$\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds = f(x)$$

түрінде жазылады.

Вольтерраның 2-текті интегралдық тендеуі деп

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x,s)\varphi(s)ds + f(x) \quad (2)$$

түріндегі, ал I-текті интегралдық тендеуі деп

$$\int_a^x K(x,s)\varphi(s)ds = f(x)$$

түріндегі тендеуді айтады.

Егер $\varphi(x)$ функциясын интегралдық тендеуге қойғанда тендеу тепе-теңдікке айналса, онда $\varphi(x)$ функциясы интегралдық тендеудің шешімі деп

аталады. Интегралдық теңдеудің шешімі бар және оның жалғыз болуы λ параметріне байланысты екенін алдағы бөлімдерде көрсетеміз. Мәселен, Фредгольмнің біртекті интегралдық

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds$$

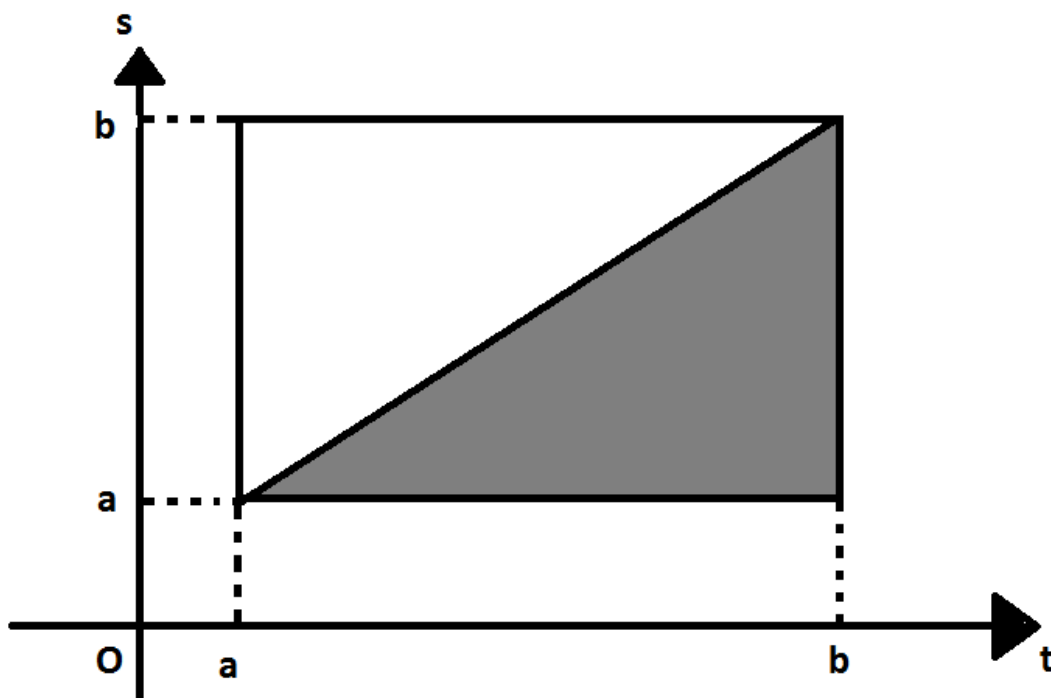
теңдеуінің λ параметрінің кез келген мәндерінде $\varphi(x)=0$ шешімі бар болады, ал нөлден ерекше шешімдер әрқашан бар бола бермейді.

Фредгольмнің біртекті интегралдық теңдеуінің нөлге тең емес шешімдері бар болатын λ параметрінің мәндері меншікті мәндер деп, ал оларға сәйкес нөлден ерекше шешімдер меншікті функциялар деп аталады.

Ескерту. Вольтерра теңдеуін Фредгольм теңдеуінің дербес түрі деп карауға болады. Себебі (2) теңдеуінің $K(x,s)$ ядросы $a \leq x \leq b, a \leq s \leq x$ облысында анықталған, ал $a \leq x, s \leq b$ жағдайында $K(x,s)=0$ деп алсақ, онда біз (1) теңдеуінің ядросын

$$K_0(x,s) = \begin{cases} K(x,s), & x \geq s, \\ 0 & x \leq s \end{cases}$$

түрінде анықтаймыз (1-сурет).



1-сурет

Бұл ескерту бойынша Фредгольм теңдеуі үшін дәлелденген қасиеттер Вольтерра теңдеуі үшін де орындалады. Бірақ Вольтерра теңдеуінің тек өзіне

тән ерекше қасиеттері бар, сондықтан Фредгольм теңдеуімен қатар Вольтерра теңдеуін де қарастырамыз.

Алдағы уақытта (1) және (2) интегралдық теңдеулердегі берілген бос мүше $f(x)$ пен ядро $K(x, s)$ үзіліссіз немесе квадраттарымен интегралданатын функциялар:

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < +\infty, \quad \int_a^b \int_a^b |K(x, s)|^2 dx ds < +\infty,$$

яғни $f(x), K(x, s) \in L_2(D)$ деп ұйғарамыз. Осы шартты қанағаттандырушы $K(x, s)$ функциясын Фредгольм ядросы деп атайды. Фредгольм ядроларына мысалдар келтірейік.

1-мысал. $K(x, s) = e^{-xs}$ ядросындағы айнымалылар $1 \leq x, s < \infty$ болғанда e^{-xs} фредгольмдік ядро болады, ал $0 \leq x, s < \infty$ болса, онда ол фредгольмдік ядро болмайды.

Расында $\int_1^\infty \int_1^\infty |e^{-xs}|^2 ds dx = \frac{1}{2} \int_1^\infty e^{-2x} dx < \infty, \quad \int_0^\infty \int_0^\infty |e^{-xs}|^2 ds dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dx}{x} = \infty.$

2-мысал. Егер интегралдық теңдеудің ядросы

$$K(x, s) = \frac{A(x, s)}{|x - s|^\alpha}, \quad \alpha \leq x, s \leq b, \quad (3)$$

мұндағы $A(x, s)$ – үзіліссіз функция және $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ болса, онда ядро фредгольмдік болады, ал $\alpha \geq \frac{1}{2}$ болса, ол ядро фредгольмдік болмайды.

Егер (3) ядросында $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ болса, онда ядро ерекшелігі әлсіз немесе полярлық ерекшелікті ядро деп, ал теңдеу ерекшелігі әлсіз интегралдық теңдеу деп аталады. Егер $\alpha = 1$ болса, онда $K(x, s) = A(x, s)|x - s|^{-1}$ интегралданбайтын функция болады. Бұл функциядан алынған интеграл тек Кошидің бас мәні мағынасында ғана бар болуы мүмкін. Ядросы $K(x, s) = A(x, s)|x - s|^{-1}$ түріндегі интегралдық теңдеуді сингулярлық интегралдық теңдеу, ал басқаларын регулярлық интегралдық теңдеулер деп атайды. Бір аргументті сингулярлық интегралдық теңдеудің жалпы түрі:

$$a(x)\varphi(x) - \frac{b(x)}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(s)}{s - x} ds + \int_{\Gamma} K(x, s)\varphi(s) ds = f(x),$$

мұнда, Γ – комплекс жазықтықтағы тұйық немесе тұйық емес қарапайым доғалар жиыны: $x, s \in \Gamma$, $a(x), b(x)$ және $f(x)$ функциялар Γ доғасында анықталған, ал $K(x, s) \in L_2(\Gamma \times \Gamma)$.

Біз тек сызықтық регулярлық интегралдық теңдеулерді ғана қарастырамыз. Интегралдық теңдеулерді бір аргументті функция үшін ғана емес, көп аргументті функциялар үшін де қарастыруға болады.

Мәселен, Фредгольмнің 2-текті интегралдық $\varphi(x) = \lambda \int_{\Omega} K(x, s) \varphi(s) ds + f(x)$ теңдеуіне ядро $K(x, s) \in L_2(\Omega \times \Omega)$, бос мүше $f(x) \in L_2(\Omega)$, ал $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$, $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in \Omega \in R^n$.

Фредгольмнің 2-текті сызықтық интегралдық теңдеулер жүйесі

$$\varphi_{\ell}(x) - \lambda \sum_{j=1}^n \int_a^b K_{\ell j}(x, s) \varphi_j(s) ds = f_{\ell}(x), \quad \ell = 1, 2, \dots, n$$

түрінде өрнектеледі. Егер $\varphi(x) = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$, $f(x) = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ векторлар, ал ядро $K(x, s)$ элементтері $K_{\ell j}(x, s)$ болатын матрица деп қарасак, онда (1) жүйені теңдеуі түрінде жазуға болады.

Дәл осылай екі аргументті функция үшін Вольтерра теңдеуі

$$\varphi(x, y) = \lambda \int_a^x \int_a^y K(x, y, s, t) \varphi(s, t) ds dt + f(x, y)$$

түрінде, ал жүйесін

$$\varphi_{\ell}(x) = \lambda \sum_{j=1}^n \int_a^x K_{\ell j}(x, s) \varphi_j(s) ds + f_{\ell}(x), \quad \ell = 1, 2, \dots, n$$

түрінде өрнектеуге болады.

Математикалық, физикалық кейбір қолданбалы есептерді шешу сызықтық емес интегралдық теңдеулерді шешуге алып келеді. Сондықтан кейбір практикалық және теориялық маңызы бар бірнеше сызықтық емес интегралдық теңдеулерді зерттеусіз келтірейік.

1) Гаммерштейн теңдеуі:

$$\varphi(x) = \int_{\Omega} K(x, s) F(s, \varphi(s)) ds + f(x),$$

мұндағы, $K(x, s)$ - фредгольмдік ядро.

2) Урысон теңдеуі:

$$\varphi(x) = \int_{\Omega} K(x, s, \varphi(s)) ds + f(x),$$

мұндағы, $K(x, s, \varphi(s))$ – үзіліссіз функция; $x, s \in \overline{\Omega}$, $|\varphi| < M$, ал M – шенелген оң шама.

3) Вольтерраның сызықтық емес теңдеуі:

$$\varphi(x) = \int_a^x F(x, s, \varphi(s)) ds + f(x),$$

мұндағы, $F(x, s, t)$ – үзіліссіз функция, $D \equiv \{a \leq x, s \leq b\}$, $|t| \leq M$ облысында анықталған.

4) Ляпунов-Лихтенштейн теңдеуі:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K_1(x, s) \varphi(s) ds + \int_a^b \int_a^b K_{11}(x, s, t) \varphi(t) \varphi(s) ds dt,$$

мұндағы, K_1 мен K_{11} үзіліссіз функциялар.

Егер теңдеулерде белгісіз функцияның интегралымен қоса туындылары да бар болса, ондай теңдеулерді интегро-дифференциалдық теңдеулер дейміз. Мысал үшін мына ең қарапайым интегро-дифференциалдық теңдеулерді келтірейік:

$$\frac{d\varphi}{dx} = a(x)\varphi(x) + \int_a^x K(x, s)\varphi(s) ds + f(x); \quad (4)$$

$$\frac{d\psi}{dx} = b(x)\psi(x) + \int_a^x K(x-s)\psi(s) ds + F(x), \quad (5)$$

мұнда белгісіз функциялардың бірінші ретті туындылары бар болғандықтан, бұл теңдеулердің шешімі жалғыз болуы үшін қосымша $\varphi(\alpha) = A$, $\psi(\alpha) = B$ шарттары берілуі қажет.

Қолданбалы математикада интегро-дифференциалдық сызықтық, сызықтық емес теңдеулер немесе теңдеулер жүйесі және жоғарғы ретті туындылы (көлуілі және дербес туындылы) интегро-дифференциалдық теңдеулер көп кездеседі. Мысалы,

$$L\varphi \equiv \frac{d^2\varphi}{dx^2} + a_1(x)\frac{d\varphi}{dx} + a_2(x)\varphi(x) = \int_a^\beta K(x, s)\varphi(s) ds + f(x)$$

теңдеуінің $\varphi(\alpha) = A_0$, $\varphi'(\alpha) = A_1$ бастапқы шарттарын немесе $\varphi(\alpha) = A$, $\varphi(\beta) = B$ шекаралық шарттарын қанағаттандыратын шешімін табу есебін қарастыруға болады. Егер белгісіз функция көп аргументті болса, онда интегро-дифференциалдық теңдеулерде белгісіз функциялардың дербес туындылары мен интегралдары көп өлшемді болады. Интеграл астындағы өрнекте белгісіз функциялардың туындылары болатын интегро-дифференциалдық теңдеулер жиі кездеседі. Кейбір жағдайларда интеграл астындағы туындының реті жоғары болса, ондай теңдеулердің шешімдері

барлық уақытта бола бермейді және шешімнің бар екенін дәлелдеген күнде оны табу оңай емес. Ал егер интеграл сыртындағы өрнекте белгісіз функциялардың туындылары жоғарғы ретті болса, көп жағдайда мұндай интегро-дифференциалдық теңдеулерді жүйелерге дифференциалдық және интегралдық теңдеулердің, жүйенің жалпы теориясын пайдаланып шешуге болады.

3-мысал. (4) пен (5) теңдеулерін сызықтық интегралдық теңдеулерге келтірейік. Ол үшін:

$$\int_{\alpha}^{\beta} K(x, s) \varphi(s) ds + f(x) = Q(x)$$

деп белгілесек, онда (4) теңдеуінен $\varphi'(x) - a(x)\varphi(x) = Q(x)$ 1-ретті сызықтық дифференциалдық теңдеуін аламыз. Оның шешімі:

$$\varphi(x) = e^{\int_{\alpha}^x a(s) ds} \left[A + \int_{\alpha}^x Q(s) e^{-\int_{\alpha}^s a(\tau) d\tau} ds \right]$$

Бұл өрнекке $Q(s)$ -тің мәнін қойсақ,

$$\varphi(x) = \int_{\alpha}^x \left\{ \int_t^x K(s, t) e^{-\int_{\alpha}^s a(r) dr} ds \right\} \varphi(t) dt + A e^{\int_{\alpha}^x a(s) ds} + \int_{\alpha}^x f(s) e^{-\int_{\alpha}^s a(\tau) d\tau} ds.$$

Мұнда,

$$\bar{K}(x, t) = \int_t^x K(s, t) e^{-\int_{\alpha}^s a(\tau) d\tau} ds,$$

$$\bar{f}(x) = A e^{\int_{\alpha}^x a(s) ds} + \int_{\alpha}^x f(s) e^{-\int_{\alpha}^s a(\tau) d\tau} ds$$

белгілеулер енгізсек, онда біз Вольтерраның 2-текті сызықтық

$$\varphi(x) = \int_{\alpha}^x \bar{K}(x, t) \varphi(t) dt + \bar{f}(x)$$

теңдеуін аламыз. Осы әдіспен (5) теңдеуін Фредгольмнің 2-текті сызықтық интегралдық теңдеуіне келтіруге болады.

§1.2. Интегралдық теңдеуге келтірілген есептер

1. Абель есебі. (ξ, η) вертикаль жазықтығында материалдық нүкте өзінің ауырлық күші әсерінен қисық сызық бойымен қозғалады. Берілген $f(y)=t$ уақытта дене алғашқы жылдамдықсыз ординатасы y болған нүктеден ξ осіне жететін қисық сызықты табу керек. Қозғалатын нүктенің жылдамдығының абсолютті шамасы: $v = \sqrt{2g(y-\eta)}$.

Егер $\alpha = \alpha(\eta)$ арқылы белгісіз қисықтың (ξ, η) нүктесіне жүргізілген жанаманың ξ осімен жасайтын бұрышын белгілесек, онда

$$\frac{d\eta}{dt} = -\sqrt{2g(y-\eta)} \sin \alpha$$

шамасы жылдамдықтың η осі бойынша құраушысы болады. Соңғы теңдіктен

$$dt = \frac{d\eta}{\sqrt{2g(y-\eta)} \sin \alpha}.$$

Мұны 0-ден y -ке дейін интегралдап, әр $\varphi(\eta) = \frac{1}{\sin \alpha(\eta)}$ деп белгілесек, онда біз Абель теңдеуін аламыз:

$$\int_0^y \frac{\varphi(\eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta = -\sqrt{2g} f(y).$$

Егер бұл өрнектен $\varphi(y)$ функциясын анықтасақ, онда іздеген қисық сызықты табу қиын емес. $\varphi(\eta) = \frac{1}{\sin \alpha(\eta)}$ теңдігінен $\eta = \psi(\alpha)$ екенін анықтаймыз. Содан

кейін $\eta'(\xi) = \frac{d\eta}{d\xi} = \operatorname{tg} \alpha$ болғандықтан, $d\xi = \frac{d\eta}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\psi'(\alpha) d\alpha}{\operatorname{tg} \alpha}$. Бұл өрнекті

интегралдап, $\xi = \int \frac{\psi'(\alpha)}{\operatorname{tg} \alpha} d\alpha \equiv \psi_1(\alpha)$ екенін анықтаймыз. Сонымен, анықтайтын сызық $\xi = \psi_1(\alpha), \eta = \psi_2(\alpha)$ параметрлік теңдеулерімен беріледі екен.

2. Шектің тербелуі. Ұзындығы ℓ серпімді (2-сурет) шек тыныштық кезінде Ox осіндегі OA кесіндісімен дәл келсін. Шектің шекаралары O мен A нүктелерінде бекітілген. T шектің керілу күші. Шекке $x = \xi$ болатындай B нүктесінде вертикаль P күші әсер етсін. Бұл күштің әсерінен OA шегі OB_1A сынық сызығы түрін қабылдайды. Сонда $BB_1 = \delta$ шамасын OB мен және BA мен салыстырғанда өте аз шама деп қарастырамыз. Тепе-теңдік заңының шарты бойынша шығатыны: $T \sin \alpha + T \sin \beta = p$. δ ның өте аз шама екенін ескерсек,

Грин функциясы деп аталады. Бұл өрнектен $G(x, \xi) = G(\xi, x)$ екенін оңай көруге болады. Егер шектің барлық нүктелеріне сызықтық тығыздығы $p(\xi)$ үзіліссіз таралған күш әсер етсе, онда шектің иілуі

$$y(x) = \int_0^l p(\xi) G(x, \xi) d\xi \quad (6)$$

өрнекпен анықталды.

Мына есептерді қарастыралық.

а) Шектің иілуі $y = f(x)$ болғанда оған әсер етуші күштің $p(\xi)$ тығыздығын табу керек болсын. Сонда Фредгольмнің 1-текті

$$\int_0^l G(x, \xi) p(\xi) d\xi = f(x)$$

теңдеуін шешуге келеміз, яғни бұл теңдеуден белгісіз $p(\xi)$ -ді тапсақ, есеп шешілген болады.

ә) Шекке уақыт өткен сайын өзгеріп тұратын абсциссасы ξ болатын нүктеде тығыздығы $p(\xi) \sin \omega t$ болатын күш әсер етсін. Бұл күштің әсерінен шек қозғалысқа түседі. Ол $y(x) = \varphi(x) \sin \omega t$ периодты тербеліспен қозғалсын. Ол кезде уақыттың t мезетте шектің $\Delta \xi$ бөлігіне жоғарыдағы күштен басқа $-\rho(\xi) \frac{d^2 y}{dt^2} \Delta \xi = \rho(\xi) \varphi(\xi) \omega^2 \sin \omega t$ инерция күші әсер етеді. Сондықтан (6) теңдік

$$\varphi(x) \sin \omega t = \int_0^l G(x, \xi) [\rho(\xi) \sin \omega t + \omega^2 \rho(\xi) \varphi(\xi) \sin \omega t] d\xi$$

түрінде жазылды. Міне, бұл өрнектен

$$\varphi(x) = \omega^2 \int_0^l K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi + f(x),$$

яғни $\varphi(x)$ -ке қатысты, Фредгольмнің 2-текті интегралдық теңдеуі алынды, мұнда, $K(x, \xi) = \rho(x) G(x, \xi)$, $f(x) = \int_0^l G(x, \xi) p(\xi) d\xi$.

§1.3. Дифференциалдық теңдеулер үшін Коши есебі мен шекаралық есептерді шешуді интегралдық теңдеуге келтіру

Бұл параграфта біз дифференциалдық және интегралдық теңдеулер арасындағы байланысты көрсетеміз.

1) Кәдуілгі дифференциалдық теңдеу үшін Коши есебін шешу Вольтерраның интегралдық теңдеуіне келтіріледі. 1-ретті кәдуілгі дифференциалдық теңдеу $y'(x) = f(x, y(x))$ үшін бастапқы шарт $y(x_0) = y_0$ берілсін.

$y = y(x)$ функциясы осы Коши есебінің шешімі делік. Оны теңдеуге қойып, алынған тепе-теңдікті x_0 -ден x -ке дейін интегралдап,

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds$$

интегралдық теңдеуін аламыз. Мұның шешімі $y(x)$ функциясы берілген есептің де шешімі екенін тексеру қиын емес.

Коэффициенттері үзіліссіз функциялар болатын n -ретті сызықтық дифференциалдық теңдеу үшін Коши есебін шешу де 2-текті Вольтерраның интегралдық теңдеуін шешуге келтіріледі. Бұл жағдайды мына 2-ретті теңдеу үшін қарастырамыз: $y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = f(x)$ теңдеуі үшін $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$ бастапқы шарттары берілсін. Бұл есепте $y''(x) = \varphi(x)$ деп белгілеп, одан кейін теңдікті бастапқы шарттарды пайдаланып интегралдау нәтижесінде

$$y'(x) = y_1 + \int_{x_0}^x \varphi(s) ds, \quad y(x) = y_0 + y_1(x - x_0) + \int_{x_0}^x (x - s) \varphi(s) ds$$

теңдеуін аламыз. Ал соңғы өрнектерді пайдаланып, берілген теңдеуден

$$\varphi(x) + \int_{x_0}^x K(x, s) \varphi(s) ds = f(x)$$

Вольтерраның 2-текті интегралдық теңдеуін аламыз, мұндағы,

$$K(x, s) = a_1(x) + a_2(x)(x - s), \quad f(x) = f_0(x) - y_1 a_1(x) - (y_0 + y_1 x) a_0(x).$$

Мысалы, $y''(x) + x^2 y'(x) + x y(x) = 1 - 4x^2$ дифференциалдық теңдеуінің $y(0) = 0$, $y'(0) = -2$ бастапқы шарттарын қанағаттандыратын шешімін табу керек.

Осы Коши есебін интегралдық теңдеумен алмастырайық. Ол үшін белгісіз $y(x)$ функциясының 2-ретті туындысын жаңа белгісіз $\varphi(x)$ арқылы $y''(x) = \varphi(x)$ деп белгілесек, одан кейін бұл өрнектің екі жағын да 0-ден x -ке дейін интегралдап және бастапқы шарттарды ескеріп,

$$y'(x) = \int_0^x \varphi(s) ds - 2, \quad y(x) = -2x + \int_0^x (x - s) \varphi(s) ds$$

өрнектерін аламыз. Бұл соңғы үш өрнекті теңдеуге қойсақ,

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x (2x^2 - xs)\varphi(s)ds$$

интегралдық теңдеуін аламыз.

2) $y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y(x) = f(x)$ теңдеуін $y(a) = A, y(b) = B$ шекаралық шарттарымен қоса қарастыралық. Кәдуілгі дифференциалдық теңдеулер курсына бұл есеп Грин функциясы арқылы

$$y(x) = \int_a^b G(x, s) f(s) ds$$

түрінде шешіледі. Егер теңдеудің оң жағы $f(x, y(x))$ түрінде белгісіз $y(x)$ функциясына тәуелді күрделі функция болса, онда соңғы өрнектен

$$y(x) = \int_a^b G(x, s) f(s, y(s)) ds$$

интегралдық теңдеуі шығады. Мәселен, $f_1(x) = f_0(x) + \lambda f(x, y(x))$ түрінде болса, онда біз сызықтық біртекті емес

$$y(x) = \lambda \int_a^b f_1(s) G(x, s) y(s) ds + \int_a^b G(x, s) f_0(s) ds$$

интегралдық теңдеуін аламыз.

3) Кейбір жағдайда интегралдық теңдеуді дифференциалдық теңдеуге келтіріп шешуге болады. Берілген

$$\varphi(x) = 1 + 2 \sin x + \int_0^x \cos(x-s)\varphi(s)ds$$

теңдеуін екі рет дифференциалдасақ,

$$\varphi'(x) = 2 \cos x - \int_0^x \sin(x-s)\varphi(s)ds + \varphi(x), \quad \varphi''(x) = -2 \sin x - \int_0^x \cos(x-s)\varphi(s)ds + \varphi'(x)$$

өрнектерін аламыз. Бұлардан

$$\varphi''(x) - \varphi'(x) + \varphi(x) = 1,$$

2-ретті дифференциалдық теңдеуі шығады. Жоғарыдағы өрнектерден $\varphi(0) = 1, \varphi'(0) = 3$ бастапқы шарттары алынады. Демек, интегралдық теңдеуді шешу мәселесі 2-ретті дифференциалдық теңдеуді шешудің Коши есебіне келтірілді.

Параметр λ -ға тәуелді $x^2 y'' + 2xy' = \lambda y + 1$ дифференциалдық теңдеуі $\varphi(1) = 0, \varphi'(3) = 0$ шарттарын қанағаттандыратын шекаралық есепті интегралдық теңдеуге келтірейік. Ол үшін $x^2 y'' + 2xy' = 0$ теңдеуінің алдыңғы

шарттарды қанағаттандыратын Грин функциясын құрайық. Бұл теңдеудің сызықтық тәуелсіз шешімдері $y_1(x)=1$, $y_2(x)=-\frac{1}{x}$. Сондықтан Грин функциясын

$$G(x, \xi) = \begin{cases} a_1(s) + a_2(s) \frac{1}{x}, & 1 \leq x \leq s, \\ b_1(s) + b_2(s) \frac{1}{x}, & s \leq x \leq 3 \end{cases}$$

түрінде іздейміз, мұндағы, $a_i(s), b_i(s), (i=1,2)$ белгісіз функциялар. Грин функциясының шарттарын пайдалансақ, $a_i(s), b_i(s), (i=1,2)$ функцияларын төмендегі теңдеулер жүйесімен анықтаймыз:

$$a_1(s) + a_2(s) = 0, \quad -\frac{1}{9}b_2(s) = 0, \quad a_1(s)\frac{1}{s^2} - b_2(s)\frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2}.$$

Осы жүйені шешіп, $a_1(s)=-1$, $a_2(s)=1$, $b_1(s)=\frac{s-1}{s}$, $b_2(s)=0$ екенін анықтаймыз. Демек,

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{x} - 1, & 1 \leq x \leq s, \\ 1 - \frac{1}{s}, & s \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Енді осы өрнекпен анықталған Грин функциясын пайдаланып, берілген дифференциалдық теңдеудің берілген шекаралық шарттарды қанағаттандыратын шешімін табу үшін

$$y(x) = \lambda \int_1^3 G(x, s) y(s) ds + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + 2x + 4a$$

интегралдық теңдеуін аламыз.

2. ФУНКЦИОНАЛДЫҚ АНАЛИЗДЕН КӨМЕКШІ МАҒЛҰМАТТАР

§2.1. Метрикалық кеңістіктер және олардың кейбір қасиеттері

M сызықтық жиыны берілсін. Оның кез келген $x, y \in M$ нүктелер жұбы үшін арақашықтық немесе метрика ұғымы, оң $\rho(x, y)$ шамасы енгізіліп, ол:

10. $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$ (тепе-теңдік аксиомасы);

20. $\rho(x, y) = \rho(y, x), \forall x, y \in M$ (симметрия аксиомасы);

30. $\rho(x, y) + \rho(y, z) \leq \rho(x, z), \forall x, y, z \in M$ (үшбұрыштар аксиомасы)

шарттарын қанағаттырса, онда M жиыны метрикалық кеңістік деп аталады. Бір жиында бірнеше метрика ұғымын анықтап, бірнеше метрикалық кеңістіктер алуға болады.

Мысалдар. 1) Арақашықтық $\rho(x, y) = |x - y|$ теңдігімен анықталған нақты сандар жиыны Q метрикалық кеңістік болады. Себебі 10-30 аксиомалардың Q жиыны үшін орындалатыны айқын.

2) Арақашықтық

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}$$

теңдігімен анықталған $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ реттелген n нақты сандар жиыны метрикалық кеңістік түзеді. Бұл кеңістікті, әдетте, n өлшемді евклидтік кеңістік деп, оны R^n арқылы белгілейді.

3) $[a, b]$ кесіндіде анықталған барлық үзіліссіз функциялар жиыны, егер арақашықтық

$$\rho(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| \quad (7)$$

теңдігімен анықталса, метрикалық кеңістік түзеді.

Шынында да, 10 мен 20 – аксиомалардың орындалатын оңай тексеріледі, ал 30 – аксиоманы тексерелік. $\forall t \in [a, b]$ үшін

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &= |[x(t) - z(t)] + [z(t) - y(t)]| \leq |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)| \leq \\ &\leq \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - z(t)| + \max_{a \leq t \leq b} |z(t) - y(t)| \leq \rho(x, z) + \rho(y, z). \end{aligned}$$

Бұл теңсіздік $\forall t \in [a, b]$ үшін болғандықтан:

$$\rho(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$$

түрінде жазылады.

Демек Z^0 – аксиома да орындалады. Сонымен арақашықтық (7) өрнегімен анықталғанда $[a, b]$ кесіндідегі барлық үзіліссіз функциялар жиыны метрикалық кеңістік түзеді; ол кеңістікті $C[a, b]$ арқылы белгілейді.

4) $[a, b]$ сегментінде квадратымен интегралданатын, яғни

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < +\infty$$

теңсіздігін қанағаттандыратын функциялар жиынын қарастырайық. Арақашықты

$$\rho(x, y) = \left[\int_a^b |x(t) - y(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

формуласымен анықтап, жоғарыдағы аксиомалардың орындалуын тексерейік. Симметрия аксиомасының орынды екені анық. Ал тепе-теңдік аксиомасы $\rho(x, y) = 0 \Rightarrow x(t) = y(t), \forall t \in [a, b]$ үшін орындалған, яғни өлшемі нөл болатын жиында ғана $x(t)$ мен $y(t)$ бір-біріне тең емес. Ұшбұрыштар аксиомасы Коши-Буняковский теңсіздігінен шығады:

$$\left(\int_a^b x(t)y(t)dt \right)^2 \leq \int_a^b x^2(t)dt \int_a^b y^2(t)dt. \quad (9)$$

Расында, егер (9) теңсіздігін $u(t), v(t)$ үшін пайдалансақ, онда

$$\begin{aligned} \int_a^b (u+v)^2 dt &\leq \int_a^b u^2 dt + 2 \int_a^b uv dt + \int_a^b v^2 dt \leq \int_a^b u^2 dt + \int_a^b v^2 dt + \\ &+ 2 \left[\int_a^b u^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b v^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\left(\int_a^b u^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b v^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2. \end{aligned}$$

Бұл өрнектің екі жағынан да квадраттық түбір алсақ ($u = x - z, v = z - y$), онда

$$\left[\int_a^b (x-y)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\int_a^b (x-z)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int_a^b (z-y)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

болады, яғни $\rho(x, y) + \rho(y, z) \leq \rho(x, z)$, демек, ұшбұрыштар аксиомасы орынды. Арақашықтық (8) формуласымен анықталғанда $[a, b]$ кесінді де квадратымен интегралданатын функциялар жиыны метрикалық кеңістік құрады, оны $L_2[a, b]$ арқылы белгілейді.

Метрикалық кеңістіктің элементтерін кеңістіктің нүктелері деп айтады. $\rho_M(x, a) < r$ (сәйкес $\rho_M(x, a) \leq r$) теңсіздігін қанағаттандыратын метрикалық

M кеңістігіндегі x нүктелері жиынын центрі a нүктесінде, радиусы r болатын шар (тұйық шар) деп айтады да $S(a, r)$ ($\bar{S}(a, r)$) арқылы белгілейді.

M –кез келген метрикалық кеңістік болсын. Егер осы кеңістіктен алынған $\{x_n\} \in M$ тізбегі үшін $\rho(x_n, x_0) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, x_0 \in M$ болса, онда $\{x_n\}$ тізбегін $x_0 \in M$ нүктесіне жинақталатын тізбек дейді. Егер $\{x_n\} \in M$ тізбегі үшін $\forall \varepsilon > 0$ санына сәйкес $N(\varepsilon)$ саны табылып, барлық $n, m > N(\varepsilon)$ үшін $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда $\{x_n\}$ тізбегі өзіне жинақты немесе іргелі тізбек деп аталады.

Теорема. Егер $\{x_n\}$ тізбегі $x_0 \in M$ нүктесінде жинақты болса, онда ол іргелі тізбек болады.

Дәлелдеу. $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ онда $\forall \varepsilon > 0$ үшін $N(\varepsilon)$ саны табылып, $n > N(\varepsilon)$ болғанда $\rho_M(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}, m > N(\varepsilon)$ болғанда $\rho_M(x_m, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ теңсіздігі орындалады. Бұл соңғы екі өрнектен үшбұрыштар аксиомасы бойынша $n, m > N(\varepsilon)$ үшін $\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x_0) + \rho(x_m, x_0) < \varepsilon$ теңсіздігі шығады. Бұл теңсіздіктен анықтамаға сүйеніп, $\{x_n\}$ тізбегі іргелі тізбек екеніне көзіміз жетеді.

Метрикалық кеңістікте жинақты тізбектің шегі сол кеңістіктің элементі болмайтын тізбектер кездеседі. Мысалы, R –рационал сандар жиыны болсын, мұндағы арақашықты $\rho(r_1, r_2) = |r_1 - r_2|$ өрнегімен анықтайық. Әрине R метрикалық кеңістік. Енді осы кеңістіктен $\{r_n\}$ тізбегін қарастыралық, мұнда, $r_n = \frac{1}{2^n} a$. Бұл тізбек өзіне және $r_0 = 0 \in R$ шегіне жинақты. Ал енді

жалпы мүшесі
$$r_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

болған тізбекті қарастырсақ, ол өзіне жинақты, бірақ рационал сандар кеңістігінде шегі онда жатпайды (R –де), себебі

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

шегі иррационал сан.

Егер метрикалық M кеңістігінің элементтерінен құралған іргелі тізбектің шегі сол кеңістікте жатса, ондай кеңістік толық кеңістік деп аталады. Мысалы, элементтері үзіліссіз функциялар болатын $C[a, b]$ кеңістігінде ұзындық өлшемін

$$\rho(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| \quad (7)$$

формуласымен анықтадық. $\{x_n(t)\}$ іргелі тізбегі берілсін, мұнда, $x_n(t) \in C[a, b]$; тізбек іргелі болғандықтан $\forall n, m > N(\varepsilon)$ үшін $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Олай болса,

$$\max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| < \varepsilon, \forall m, n > N(\varepsilon).$$

Бұл өрнек $\{x_n(t)\}$ тізбегі үшін $[a, b]$ кесіндідегі бірқалыпты жинақтылықтың Коши критерийі орынды екенін көрсетеді. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x_0(t)$ сол тізбектің шегі болсын, демек, $x_0(t)$ бірқалыпты жинақты үзіліссіз функциялар тізбегінің шегі, олай болса, $[a, b]$ сегментінде үзіліссіз, яғни $x_0(t) \in C[a, b]$ және $\rho(x_n, x_0) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Демек, $C[a, b]$ кеңістігі толық. $L_2[a, b]$ кеңістігі де толық екенін көрсетуге болады. Нақты сандар жиыны Q ұзындық өлшемі $\rho(x, y) = |x - y|$ болғанда толық.

1-ескерту. M – метрикалық кеңістік болсын. Кез келген $M_0 \subset M$ кеңістігі де сол ұзындық өлшемімен метрикалық кеңістік болады.

2-ескерту. Егер M – метрикалық кеңістік болса, онда $M_0 \subset M$ кеңістігі толық болмауы, мүмкін, бірақ M_0 тұйық кеңістік болса, онда ол толық болады.

M мен N метрикалық кеңістіктер болсын. Егер осы кеңістіктердің нүктелері арасында өзара бірмәнді сәйкестік болып және сәйкес нүктелердің арақашықтығы сақталса, яғни, $x \leftrightarrow y, x' \leftrightarrow y', x, x' \in M, y, y' \in N \Rightarrow \rho(x, x') = \rho(y, y')$ болса, онда M мен N кеңістіктерін изометрикалық кеңістіктер деп атайды. Бір кеңістіктегі изометрикалық екі жиын туралы да айтуға болады. Әрине, изометрикалық қасиеттері ұқсас, сондықтан оларды кейде бірдей қасиетті кеңістіктер деп те атайды.

Параграфтың соңында толық емес кеңістікті қалайша толық етуге болатынын қарастырайық. M_0 толық емес метрикалық кеңістік болсын. Бұл жағдайда M толық жиыны табылатынын және оның тығыз бөлігі $M_1 \subset M$ мен M_0 изометрикалық кеңістіктер екенін дәлелдеуге болады. Бұл M жиыны изометрикалық дәлдікпен бірмәнді түрде анықталып, M_0 -дің толықтырушы кеңістігі деп аталады.

Егер сызықтық E_1 мен E_2 кеңістіктерінің элементтері арасында бірмәнді сәйкестік бар болып, сәйкес элементтері $x_1 \leftrightarrow x_2$ және $y_1 \leftrightarrow y_2$

$(x_1, y_1 \in E_1, x_2, y_2 \in E_2)$ үшін $x_1 + y_1 \leftrightarrow x_2 + y_2$ және $\lambda x_1 \leftrightarrow \lambda x_2$ шарттары орындалса, онда E_1 мен E_2 кеңістіктерді сызықты изоморфты деп аталады. Сызықты изоморфты кеңістіктер изоморфтық дәлдікпен өзара тең немесе олардың бірінен-бірі ешқандай айырмашылығы жоқ деп есептеледі.